第18卷 第6期
2005年12月

化 学 物 理 学 报
CHINESE JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS

Vol. 18, No. 6
Dec. 2005

1003-7713/2005/06-971-5

基于分布链修正的磁流变弹性体的物理模型*

党 辉， 朱应顺， 龚兴龙， 张培强**
（中国科学技术大学力学与机械工程系，中科院材料力学行为与设计重点实验室，合肥 230027）

摘 要： 在考虑磁流变弹性体中链的方向分布的基础上，对磁流变弹性体的偶极子模型作出了修正. 用局部场的方法计算了链的势能，引入了分布函数来描述链的分布，并分析了与磁场方向不一致的斜链的磁流变效应，进而通过积分叠加求得含有分布链的磁流变弹性体的磁流变效应. 在磁流变弹性体的理论模型中，引入了制备磁场和基体性质等影响因素.

关键词： 磁流变弹性体；磁流变效应；分布函数
中图分类号：O326 **文献标识码：**A

Revised Model of the Magnetorhelogical Elastomer Based on Distributed Chains*

Dang Hui, Zhu Yingshun, Gong Xinglong, Zhang Peiqiang**
(*Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, Chinese Academy of Sciences, Department of Mechanics and Mechanical Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027)

Abstract On the basis of distributed chains, the model of MR elastomer was revised. After the potential energy of a chain was analyzed using the local field method, a special function was used to describe the distribution of chains. Then the MR effect of distributed chains as well as the overall MR effect were studied. Concurrently, the effects of the curing magnetic field and the matrix were incorporated into the model of MR elastomer.

Key words MR elastomer, MR effect, Distribution function

1 引 言

磁流变材料是一种流变性能可由外加磁场控制的新型智能材料，在汽车、建筑和振动控制等领域有着广泛的应用. 磁流变弹性体是磁流变材料的一个分支. 它的力学性能可由外加磁场控制，主要表现为剪切模量在外加磁场下的显著增加. 利用偶极子模型[1-3]，可对其磁流变效应作出预测. 磁流变弹性体主要由基体和铁磁性颗粒组成. 制备时，将混合有铁磁颗粒的液态基体在磁场下固化. 在磁场的作用下，颗粒将在基体中重新排布，形成大体沿磁场方向的链状结构，固化完成后，这种有序结构就固定于基体中.

一般认为，磁流变弹性体中，颗粒形成的链沿着制备时的磁场方向. 但实际上，链并不完全沿着磁场方向，而是和磁场方向有一定的夹角（如图 1）.

本工作在充分考虑到链与制备磁场方向的夹角的基础上，对传统的偶极子模型[1-3]作了相应的修正.

* Project supported by Chinese Academy of Sciences and Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20030358014).

** Corresponding author, Email: pqzhang@ustc.edu.cn. Received 16 January 2005; in final form 2 September 2005.

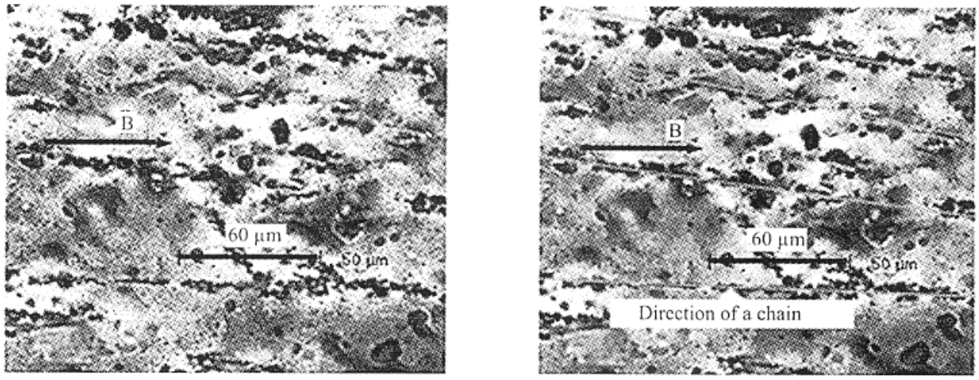

图 1 磁流变弹性体沿磁场方向的切面的电镜照片

Fig. 1 Optical photograph of chains in MR elastomer

2 势能计算

如图 2 所示,链与磁场方向的夹角为 θ,两相邻颗粒的间距为 d. 方生等考虑局部场效应,计算得到了颗粒磁矩平行于链方向的分量 $m_{/\!/}$ 和垂直于链方向的分量 $m_{\perp}$ [4]:

$$m_{/\!/} = \frac{4\pi\mu_f\mu_0 R_p{}^3\beta H_0\cos\theta}{A} \tag{1}$$

$$m_{\perp} = \frac{4\pi\mu_f\mu_0 R_p{}^3\beta H_0\sin\theta}{B} \tag{2}$$

其中,μ_0 为真空磁导率;$\beta = \dfrac{\mu_p - \mu_f}{\mu_p + 2\mu_f}$;$\mu_p$、$\mu_f$ 分别为颗粒和基体的相对磁导率;$V = \dfrac{4}{3}\pi R_p{}^3$;$R_p$ 为颗粒半径;H_0 为制备时的外加磁场.

$$\begin{cases} A = 1 - 4\beta\left(\dfrac{R_p}{d}\right)^3\zeta, \\ B = 1 + 2\beta\left(\dfrac{R_p}{d}\right)^3\zeta, \\ \zeta = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \approx 1.202 \end{cases} \tag{3}$$

设链内颗粒个数为 n,并令

$$\alpha = 4n\pi\mu_0\mu_f\beta R_p{}^3 \tag{4}$$

则链的磁矩 M 在平行于链和垂直于链方向的分量分别为:

$$\begin{cases} M_{/\!/} = \dfrac{\alpha}{A}H_0\cos\theta, \\ M_{\perp} = \dfrac{\alpha}{B}H_0\sin\theta, \end{cases} \tag{5}$$

所以,链在外场中的位势能可写成[5]

$$\mathrm{E} = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{H}_0$$

$$= -\alpha\left(\frac{\cos^2\theta}{A} + \frac{\sin^2\theta}{B}\right)H_0{}^2 \tag{6}$$

这里,局部场模型中,把颗粒当作偶极子来处理,在颗粒间距较小时会有一定的误差.

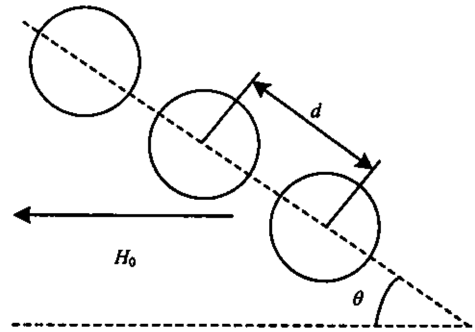

图 2 磁场中的链

Fig. 2 A chain in magnetic field

3 分布函数

这一部分从概率论的观点出发,考虑到弹性体中链的分布方式与磁场下处在不同位置的链的能量大小相关,参照热力学中的麦克斯韦-玻尔兹曼分布,引入分布函数来描述链的分布.

处于不同方向的链,能量不同. 固化前,颗粒在基体中运动,更容易成链于能量较小的方向. 该物理过程类似于顺磁质中分子固有磁矩在外加磁场下的定向排列. 因此,我们用 Langevin 的顺磁性经典理论中的方法[5],参照麦克斯韦-玻尔兹曼分布

$$f = C\cdot\exp\left(-\frac{E}{k\cdot T}\right) \tag{7}$$

设链的分布函数为:

$$f(\theta) = C\cdot\exp\left[\frac{\alpha\left(\dfrac{\cos^2\theta}{A} + \dfrac{\sin^2\theta}{B}\right)H_0{}^2}{k_0\cdot T}\right] \tag{8}$$

其中 T 为制备时的温度；C 为待定系数. 需要指出的是，(8) 式中的 k_0 不再取玻尔兹曼常数. 因为麦-玻分布描述的粒子是在真空中运动，而磁流变弹性体制备过程中颗粒的运动和重组在基体中进行，受到基体的阻碍与限制，所以这里的 k_0 是一个与制备时基体性质有关的常数. 基体的流动性越好，k_0 值越小，反之，k_0 值越大.

令
$$\alpha \frac{{H_0}^2}{k_0 \cdot T} = a \tag{9}$$

则参数 a 综合反映了颗粒大小、制备磁场、基体性质和温度等因素对链分布的影响. 此时 (8) 式可化为：

$$f(\theta) = C \cdot \exp\left[a\left(\frac{\cos^2\theta}{A} + \frac{\sin^2\theta}{B}\right)\right] \tag{10}$$

另外，由归一化条件，对半空间角积分

$$C \cdot \int \exp\left[a\left(\frac{\cos^2\theta}{A} + \frac{\sin^2\theta}{B}\right)\right] \mathrm{d}\Omega$$
$$= C \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[a\left(\frac{\cos^2\theta}{A} + \frac{\sin^2\theta}{B}\right)\right] \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$
$$= 1$$

可以求得

$$C = \frac{1}{2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[a\left(\frac{\cos^2\theta}{A} + \frac{\sin^2\theta}{B}\right)\right] \sin\theta \mathrm{d}\theta} \tag{11}$$

由于弹性体中颗粒间距一般很小，设 $d = 2.1R_p$，此时 $A = 0.48$，$B = 1.26$. $a = 5$ 时，根据 (10) 式和 (11) 式可以绘制出分布函数 f 的曲线如图 3. 从图 3 可以看出，链处在与磁场方向夹角较小的位置的概率较大，而分布在与磁场方向夹角较大的位置的概率较小. 另外，a 值越大，图形的峰越尖，链的方向越趋于一致.

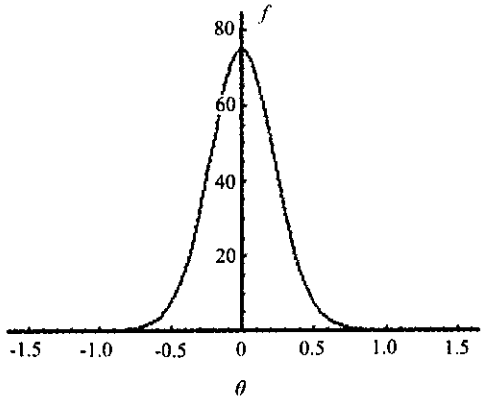

图 3　分布函数曲线

Fig. 3　Curves of distribution funtion

4　参数估计

分布函数 f 的形式确定后，就可以通过电镜照片的结果，用数理统计的方法来估计其中的参数 a 的大小，进而可求出不同的基体所对应的 k_0 值.

一方面，由分布函数可以求得 θ 的平均值

$$\bar{\theta} = C\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \exp\left[a\left(\frac{\cos^2\theta}{A} + \frac{\sin^2\theta}{B}\right)\right] \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \tag{12}$$

另一方面，由电镜照片也可以求出 θ 的平均值. 设电镜拍到 n 条链，第 i 条链与磁场方向的夹角为 θ_i，则 θ 的平均值

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i}{n} \tag{13}$$

设 $\bar{\theta} = \hat{\theta}$，就能由 (11) 式和 (12) 式联立解出参数 a 的数值. 作为样本的链越多，所得的数据将越准确. 另外，电镜也可测得颗粒间距 d，故 A、B 为可求.

再根据 (8) 式，可解得

$$k_0 = \alpha \frac{H_0^2}{a \cdot T} \tag{14}$$

其中 α 由 (4) 式给出. 这样，对于不同的基体，可以通过实验求得与基体性质有关的系数 k_0. k_0 可以作为评价基体的一个重要参数，k_0 越小，基体的性能越好.

5　应变分析

通过计算，可以求得与磁场方向有一定夹角的链自身的剪应变和弹性体整体的剪应变之间的关系.

建立三维直角坐标系，使磁流变弹性体受剪切的方向，垂直于 z 轴，沿 x 轴正向，对应的剪切应变定义为整体剪应变；垂直于链的剪切对应链自身的剪应变，定义为链剪应变. 当弹性体发生整体剪应变时，会引起链剪应变，且二者之间满足一定的变换关系. 另外，测试磁场方向沿 z 轴方向，且与制备时所加磁场方向一致.

图 4 中 OM 是沿 (θ, φ) 空间方向的一根链，OM 和 z 轴的夹角为 θ，和 x 轴的夹角为 β. OM 在 xOy 平面的投影长度为 a，且投影和 x 轴的夹角为 φ. OM 的长为 c，M 点到 xOy 平面的距离为 b. 当整体剪应变为 γ 时，设 xOy 平面不动，则 M 点有沿 x 轴正方向的位移 $b \cdot \gamma$，该链的链剪应变为：

$$\gamma' = b \cdot \gamma \cdot \sin\beta / c \tag{15}$$

其中,$\sin\beta$ 可用 θ 和 φ 表示:

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \sqrt{b^2+(a\cdot\sin\varphi)^2}/c \\ &= \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi}\end{aligned} \tag{16}$$

所以,空间方向为(θ,φ)的链,对应的链剪应变和整体剪应变的变换关系为:

$$\begin{aligned}\gamma' &= \gamma\cdot\frac{b}{c}\cdot\sin\beta \\ &= \gamma\cdot\cos\theta\cdot\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi}\end{aligned} \tag{17}$$

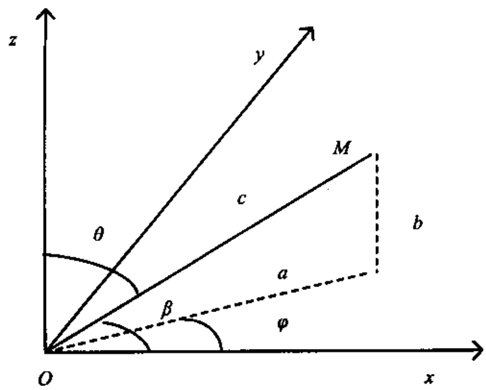

图4 直角坐标系中的链

Fig. 4 A chain in Cartesian coordinates

6 磁场分析

由于颗粒一般取铁磁性物质,其磁导率远大于基体的磁导率,且链内颗粒间距一般较小,所以当链的方向和测试磁场方向夹角不是很大时,链中的磁力线近似沿着链的轴线方向. 因此,近似地,我们假设当链的方向与磁场方向夹角较小时,平行于磁场的链和与磁场方向有一定夹角的链,其内部的磁场能量密度对链的自身剪切变形的微分相同.

对于 θ 较大的链来说,该假设高估了磁场能. 但是,一方面,从分布函数的曲线可以看出,链大部分分布在与磁场方向夹角较小的位置,另一方面,由(17)式,θ 较大的链,γ' 较小,对磁流变效应的贡献也小,所以这样的假设不会引起很明显的误差.

7 效应叠加

这部分首先对比 $\theta=0$ 和 $\theta\neq0$ 的链的磁流变效应,再借助分布函数,通过积分将各个方向的链对整体磁流变效应的贡献叠加起来.

对于与磁场方向一致的链,设一根链的磁场能量密度为 E,链自身的剪切变形为 γ',在磁场下附加的剪应力 τ' 可由下式给出[3]:

$$\tau' = \frac{\partial E}{\partial\gamma'} \tag{18}$$

对于位置为(θ,φ)的一根链,设其磁场能量密度仍为 E,整体的剪切变形为 γ,链自身的剪切变形为 γ'.

磁场所产生的附加剪应力:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\partial E}{\partial\gamma} = \frac{\partial E}{\partial\gamma'}\, g\, \frac{\partial\gamma'}{\partial\gamma} \\ &= \frac{\partial E}{\partial\gamma'}\, g\cos\theta\ \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta g\sin^2\varphi} \\ &= \tau' g\cos\theta\ \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta g\sin^2\varphi}\end{aligned} \tag{19}$$

位置为(θ,φ)的单链在磁场下附加的剪切模量

$$\triangle G(\theta,\varphi) = \triangle G(0)\, g\cos\theta\ \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta g\sin^2\varphi} \tag{20}$$

$\triangle G(0)$ 为 $\theta=0$ 的单链在磁场下的附加剪切模量.

一根链处于位置(θ,φ)的概率由函数 f 来描述. 取整体剪切模量为单链剪切模量的平均值,则含有分布链的弹性体的整体剪切模量

$$\triangle G = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \triangle G(\theta,\varphi)\cdot f(\theta)\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{21}$$

仅含有平行于磁场方向的链的弹性体的剪切模量为 $\triangle G' = \triangle G(0)$,令

$$\begin{aligned}R &= \triangle G/\triangle G' \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\sin^2\varphi} \\ &\quad\cdot f(\theta)\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{22}$$

其中,$f(\theta)$ 由(10)式和(11)式给出. R 为考虑链的分布与不考虑链的分布所得的附加剪切模量的比值.

8 结果分析

由(22)式,可以将 R 看作参数 a 的函数. 同样,设 $d=2.1R_p$、$A=0.48$、$B=1.26$,可绘出 R 随参数 a 的变化曲线如图5.

当 $a=0$ 时,由(10)式和(11)式,分布函数

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \tag{23}$$

此时,链的分布退化为均匀分布,由(22)式得:

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\ \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\sin^2\varphi} \\ &\quad\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 0.424\end{aligned} \tag{24}$$

当 $a\to\infty$ 时,$R\to1$. 这时,$\triangle G$ 的计算结果与传统的不考虑链的方向分布的偶极子模型[1-3]相同,是均

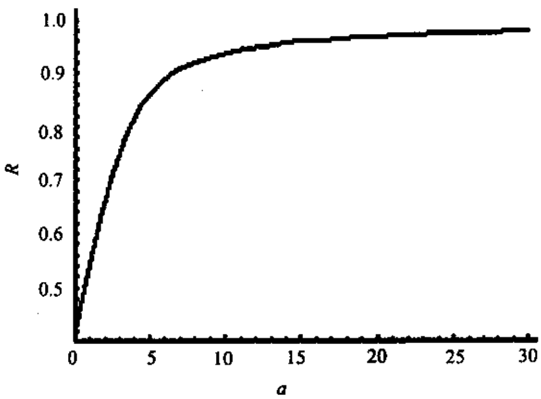

图 5　R 随 a 变化的曲线

Fig. 5　The curve of R as a function of a

匀分布时的 2.34 倍.

有足够的实验数据时,就能根据(12)和(13)解出参数 a 的值,进而可由(2)式求出 R 的值. 这样,对磁偶极子模型得到的结果[1-3]进行修正,就能求得磁流变弹性体在磁场下的剪切模量的增量:

$$\triangle G = R \cdot \triangle G' = 36R \cdot \phi\mu_f\mu_0\beta^2 H^2\left(\frac{R_p}{d}\right)^3\zeta \tag{24}$$

其中,H 为测试磁场,不同于制备时所加的磁场 H_0.

R 随着 a 的增大单调递增,增加 a 值将有利于改进材料制备. 因此,增加制备时的磁场,提高固化前基体的流动性,都有利于制备出更好的磁流变弹性体. 另外,由于温度取绝对温度,在常温附近,根据(8)式,温度的变化对结果的影响较小. 但是温度会影响基体的流动性,所以控制适当的温度也能改善材料性能[6].

参　考　文　献

[1] Davis L C. *J. Appl. Phys.*, 1999, **85**:3348

[2] Shiga T, Okada O, Kurauchi T. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1995, **58**:787

[3] Jolly M R, Carlson J D. *J. Intel. Mater. Syst. Struct.*, 1996, **7**:613

[4] Fang S (方生), Gong X L (龚兴龙), Zhang P Q (张培强) *et al. J. Univ. Sci. Techno Chin.* (中国科学技术大学学报), 2004, **34**:456

[5] Chen B Q (陈秉乾), Shu Y S (舒幼生), Hu W Y (胡望雨). Special Research On Electromagnetism (电磁学专题研究), Beijing (北京): Higher Education Press (高等教育出版社), 2001. 253

[6] Demchuk S A, Kuz'min V A. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2002, **75**:396