**文章编号**:1000-1964(2006)04-0498-06

# 磁流变液剪切屈服应力的数值分析

朱应顺,龚兴龙,李 辉,张培强

(中国科学技术大学 力学和机械工程系,中国科学院 材料力学行为和设计重点实验室,安徽 合肥 230027)

**摘要**:为了改善单链模型的准确性,从颗粒间的磁相互作用能出发,建立了磁流变液多链计算模型.考虑链内颗粒和相邻链中颗粒的影响,利用磁能密度的变化,得到了磁致剪切应力应变关系, 由剪切应力应变曲线的最大值来确定磁流变液的剪切屈服应力.对于链状结构,研究了链间距与 链内相邻颗粒距离之比对磁流变液剪切屈服应力的影响;对于柱状结构,通过确定柱的大小及相 邻柱的间距,构建了BCT结构计算模型,对含柱状结构的磁流变液的剪切屈服应力进行了分析. 计算结果表明,当比值较大时,多链模型与单链模型趋于一致;比值较小时单链模型的误差不能 忽略.传统的单链模型高估了磁流变液的剪切屈服应力,铁磁颗粒体积比浓度较小时,链状结构 有比柱状结构更高的剪切屈服应力;而当颗粒体积比浓度较大时,柱状结构优于链状结构. **关键词**:磁流变液;剪切屈服应力;磁偶极子 **中图分类号**:O 373;TB 381 文献标识码:A

# Numerical Analysis on Shear Yield Stress of Magnetorheological Fluids

ZHU Ying-shun, GONG Xing-long, LI Hui, ZHANG Pei-qiang (Department of Mechanics and Mechanical Engineering, University of Science and Technology of China, Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, Chinese Academy of Science, Hefei, Anhui 230027, China)

Abstract: In order to improve the accuracy of current models based on the single chain, a multi-chain model was presented for the magnetorheological fluids (MRF) based on the magnetic interaction energy among the particles. Taking account of the influences of particles in the same chain and the particles in all adjacent chains, making use of the variety of the magnetic energy density, a model was proposed to calculate the relationship of shear stress versus shear strain induced by the magnetic field, and the shear yield stress of magnetorheological fluid was identified as the maximum shear stress as a function of strain. For the chain-like structure, the influence of the ratio of the distance between adjacent chains to the distance between adjacent particles in a chain on the shear yield stress was quantitatively analyzed. For the columnar structure, after the size of the columns and the distance between adjacent columns being determined, and the calculating model of BCT structures being proposed, the yield stress of the magnetorheological fluid composed of columnar structures was analyzed. The results show that when the ratio is larger, the multi-chain model is compatible with the single chain model, but when the ratio is smaller, the error of the two model is significant and can not be neglected.

收稿日期: 2005-06-23

基金项目:中国科学院"百人计划"项目;高等学校博士学科点专项科研基金项目(20050358010) 作者简介:朱应顺(1981-),男,江苏省淮安市人,研究生,从事磁流变材料方面的研究. E-mail:gongxl@ustc.edu.cn Tel:0551-3600419

The traditional single chain model has overrated the shear yield stress of magnetorheological fluids. When the particle volume fraction is smaller, the shear yield stress of chain-like structure is higher than that of columnar structure, but when the particle volume fraction is larger, the converse result can be obtained.

Key words: magnetorheological fluids; shear yield stress; magnetic dipole model

磁流变液是微米尺寸的磁极化颗粒分散于非 磁性液体(矿物油、硅油等)中形成的悬浮液.在零 磁场情况下,磁流变液表现为流动性能良好的液 体;在强磁场作用下可在短时间(毫秒级)内从自由 流动的液体转变为类固体状态,其强度由剪切屈服 应力来表征;而且这种变化是连续的、可逆的,即去 掉磁场后又恢复到原来的状态.磁流变液是当前智 能材料研究领域的一个重要分支,在汽车、机械、航 空、建筑、医疗等领域具有广阔的应用前景<sup>[13]</sup>.

磁流变液的本构关系通常用宾汉塑性模型来 表示<sup>[2]</sup>

= ,(*H*) + ( ,), (1) 式中: 为剪切应力; 为零磁场黏度; ,为磁流变 液的剪切屈服应力;它与磁场强度 *H* 有关; 为剪 应变率.

磁流变液的剪切屈服应力,代表着其固化强度 的大小,是评价这种材料性能的主要参数之一[3]. 如何从磁场作用下磁流变液形成的微结构出发,计 算、估计磁流变液的剪切屈服应力也自然成为理论 研究者关心的焦点.在磁流变液理论模型方面, Bossis 等通过假设颗粒间隙处的磁场近似分布得 到了磁流变液的剪切屈服应力<sup>[3]</sup>. Lemaire 等通过 计算两个磁化小球吸引力的方法,给出了计算磁流 变液剪切屈服应力的计算公式<sup>[4]</sup>. Ginder 和 Davis 用有限元方法、考虑了颗粒的非线性磁化过程和局 部磁饱和现象,计算了磁流变液的剪切应力以及屈 服应力<sup>[5]</sup>. Zhang 等采用修正的偶极子模型并且考 虑了摩擦作用,解释了磁流变液的挤压增强现 象<sup>[6]</sup>.Jolly 等通过研究颗粒磁化和整体平均磁感 应强度的关系,得到了磁流变材料的理论计算模 型<sup>[7]</sup>. Rosensweig<sup>[8]</sup>和 Tang 等<sup>[9]</sup>利用平均场模 型,考虑了各项异性磁化,利用 Maxwell 应力张量 方法计算了含层状和柱状聚集结构磁流变液的剪 切屈服应力,不过他们的模型未考虑聚集结构的大 小.目前广泛使用的模型中,大多数只从磁流变液 中取出一条代表性的链出发来分析,甚至只考虑单 个颗粒或链内相邻颗粒的相互作用,很少见到从微 观角度出发考虑多链因素或对复杂颗粒聚集结构 如柱状结构建模计算的文献报道.

本文考虑了周围链的影响,并构建了 BCT 结 构计算模型,对磁流变液磁致剪切应力进行建模计 算,修正了传统的单链模型.据此分析磁流变液的 剪切屈服应力,对不同微观结构下的磁流变液剪切 屈服应力大小进行比较,为磁流变液性能的提高提 供依据和指导.

#### 1 计算模型

铁磁性颗粒在磁场作用下被磁化,铁磁性颗粒 之间的磁作用力使颗粒形成链状或柱状聚集结构, 直接导致了其流变性能的改变<sup>[2]</sup>.磁流变液机理的 传统分析方法均以单链结构为基础,认为链与链间 距离较大,忽略周围链的影响.本文首先对具有平 行等间距链状结构的磁流变液进行建模,建模时计 及了周围链的影响,并且周围链数可以为任意值.

假设磁流变液中,外加磁场方向与链起始时的 方向一致,由铁磁性球形颗粒形成的单链是理想 的,链内颗粒之间的间距相等,并且颗粒大小相等. 在磁场作用下,铁磁颗粒被磁化产生磁偶极矩.2 个磁偶极矩分别为 mi 和 m2,相距为 r的磁偶极子, 它们间的磁相互作用能为

假设磁流变液中链未形成聚集结构,链与链之 间平行等间隔排列.假设相邻链与链之间的间隔为 *D*<sub>0</sub>,链内相邻颗粒之间距离为 *d*<sub>0</sub>,颗粒半径大小为 *R*,链的方向与磁场方向一致.任取一颗粒为坐标 原点,建立三维直角坐标系,如图 1 所示.记空间任 意位置处颗粒坐标为(*x*, *y*, *z*).



图 1 坐你杀小息 Fig. 1 Sketch of cartesian coordinates

假设磁流变液发生剪切变形后,链偏离原来位 置角度为.设颗粒磁偶极矩大小相等,记为*m*,并 且方向相同,与磁场方向一致,则式(2)变为

$$E_{12} = \frac{m^2}{4 \ \mu_0 \mu_f} \left( \frac{1 - 3\cos^2}{r^3} \right) . \tag{3}$$

设剪切在 x 方向,颗粒只发生 x 方向位移,记 为 u,则剪应变为 = tan =  $\frac{u}{2}$ ,有

$$u = z . (4)$$

发生剪切变形后,颗粒新位置坐标为(x + z, y, z)有

$$r = ((x + z)^{2} + y^{2} + z^{2})^{1/2}.$$
 (5)

$$\cos^2 = \frac{z^2}{(x+z)^2 + y^2 + z^2}$$
. (6)

将式(5),(6)代入式(3),得

$$E_{12} = \frac{m^2}{4 \ \mu_0 \mu_f} \frac{(x+z)^2 + y^2 - 2z^2}{((x+z)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} .$$
(7)

位于坐标原点处的颗粒与位于空间各处的颗 粒之间都有磁相互作用能,对式(7)求和就可以得 到位于坐标原点处的颗粒受到的磁相互作用能总 和为

$$E = \frac{m^2}{4 \ \mu_0 \mu_f} \frac{(x+z)^2 + y^2 - 2z^2}{((x+z)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} , \quad (8)$$

### 式中 为对空间各处颗粒求和.

体积为 *v*,颗粒体积比浓度为 的磁流变液中 磁能密度为

$$E_{d} = \frac{\frac{V/2}{4 R^{3}/3}E}{V} = \frac{3}{8 R^{3}}E = \frac{3m^{2}}{32 {}^{2}\mu_{0}\mu_{f}R^{3}} \times \frac{(x+z)^{2}+y^{2}-2z^{2}}{((x+z)^{2}+y^{2}+z^{2})^{5/2}}.$$
 (9)

上式对剪切应变 求导,即可得到由于磁场引起的附加剪切应力.磁流变液中铁磁颗粒总数为有限值,可交换求和与求导的顺序,得

$${}_{a} = \frac{\partial E_{d}}{\partial} = \frac{9m^{2}}{32 \, {}^{2}\mu_{0}\mu_{f}R^{3}} \times \frac{z(x+z)(4z^{2}-(x+z)^{2}-y^{2})}{((x+z)^{2}+y^{2}+z^{2})^{7/2}} .$$
(10)

记  $x = kD_0$ ,  $y = lD_0$ ,  $z = nd_0$ , 由于链平行等 间距排列, 故 k, l, n 都为整数. 令  $= \frac{D_0}{d_0}$  即相邻链 间距离与链内相邻颗粒距离的比值,式(10)成为

$$a = \frac{9m^2}{32^{-2}\mu_0\mu_f d_0^3 R^3} \underset{k=-k_{\max}l=-l_{\max}n=-n_{\max}}{k} \times \frac{n(k+n)(4n^2 - (k+n)^2 - (l)^2)}{((k+n)^2 + (l)^2 + n^2)^{7/2}}, \quad (11)$$
$$(k_{\max} D_0, l_{\max} D_0, n_{\max} d_0) \text{ 为所考虑空间范围内}$$

离坐标原点最远处颗粒的坐标值.

如果不考虑周围链的影响,按照单链模型偶极 子理论,磁流变液的磁致剪切应力为<sup>[6]</sup>

$$_{a} = \frac{9 m^{2}}{4^{2} \mu_{0} \mu_{f} d_{0}^{3} R^{3}} , \qquad (12)$$

式中: = 
$$\frac{1}{n^{-1}}$$
 1.202,  $m = /m$  | 的定义为  
1) 磁饱和前

m =  $3\mu_f\mu_0 VH$ , (13) 式中:  $\mu_0$  为真空磁导率; =  $(\mu_p - \mu_f)/(\mu_p + 2\mu_f)$ ,  $\mu_p$ ,  $\mu_f$  分别为颗粒和载液的相对磁导率,对于铁磁 性颗粒  $\mu_p$  10<sup>3</sup>, 而  $\mu_f$  1, 因而 1. V = 4/3  $R^3$ , R 为颗粒半径.

2) 磁饱和后

$$\mathbf{m} = \mathbf{\mu}_f \mathbf{\mu}_0 \, \mathbf{M}_s V \quad , \qquad (14)$$

式中 M<sub>s</sub>为铁磁颗粒的饱和磁极化强度.

式(11),(12)相比得

$$r = \frac{-a}{a} = \frac{1}{8} \int_{k=-k_{\max}^{n} l_{\max}^{n} l_{\max}^{n} l_{\max}^{n}} \mathbf{x}$$

$$\frac{n(k+n)(4n^{2}-(k+n)^{2}-(m)^{2})}{((k+n)^{2}+(m)^{2}+n^{2})^{7/2}}, \quad (15)$$

由上式即可得到按单链模型计算时的误差,且 此误差与链内相邻颗粒距离无关.

# 2 链状结构的剪切屈服应力分析

在磁场作用下,铁磁性颗粒均匀地形成一条条 单链.假设链内相邻颗粒之间距离相等,链与链之 间平行等间隔排列,从一条链中提取出仅包含一个 磁性颗粒小球的单元体,如图2所示.



Fig. 2 Schematic cell

单元体可认为是长方体,它的几何尺寸:长、宽 都为  $D_0$ ,高度为  $d_0$ ,单元体无限扩展后即为平行等 间距链状模型. 令  $d_0 = aR$ ,  $= \frac{D_0}{d_0}$ ,则颗粒体积比 浓度与单元体几何尺寸之间的关系可以表示为

$$= \frac{\frac{4}{3}}{D_0^2} \frac{R^3}{d_0} = \frac{4}{3^2 a^3} , \qquad (16)$$

 $= \sqrt{\frac{4}{3}a^3} .$  (17)

即

一般认为,磁流变液的剪切屈服应力是其剪切 应力-应变曲线图中的应力最大值<sup>[3,5]</sup>.限于计算 量,并不失一般性,计算时所取 $k_{max}$ , $l_{max}$ , $n_{max}$ 值分 别为 300,300,1 000.对于小应变情况,不妨取 = 0.0001. = 2时,按式(12),(15)作出的磁场一定 时,磁场引起的无量纲化磁流变液剪切应力、应变 关系如图 3 所示.





从图中可见,外加磁场一定时,磁致剪切应力 - 应变关系图中,磁致剪切应力在达最大值前,与 剪应变近似呈线性关系;当剪应变 0.37时,磁 流变液的磁致剪切应力达到最大值,可将其作为磁 流变液的剪切屈服应力.其它 时的剪切应力-应 变关系与图3非常相似,可近似地将 =0.37时的 剪切应力值作为磁流变液的剪切屈服应力,即

$$y = a / = 0.37 = \frac{9 m^2}{32 {}^2 \mu_0 \mu_f d_0^3 R^3} \sum_{k=-k_{max}^{l=-l_{max}^{l=-n_{ma$$

不同情况下的磁流变液剪切屈服应力的比值 大小,可近似用小应变下的磁致剪切应力比值来代 替,即近似用式(15)来代替.

计算得到的不同 时,修正模型与单链模型 磁致剪切应力比值 *r* 如图 4 所示.



图 4 2 种模型的磁致剪切应力比值



从图中可见,用了修正后的磁流变液计算模型 后,与单链计算模型相比较,考虑周围链影响后计

7

算所得磁致剪切应力变小,即单链模型高估了磁致 剪切应力大小.当链内颗粒间距 do 一定时, 值较 小,也就是链与链之间距离较小时,单链模型的误 差较大.而当 值较大,也就是链与链之间距离较 大时,2 种模型的结果趋于一致.

假设 a = 2,即认为链内颗粒互相接触,设颗粒体积比浓度为 = 0.1,由式(17) 知, = 2.288.从 图4中知,此时,  $\stackrel{a}{=} 0.935$ ,即按单链模型计算会 6.5%的误差. 当颗粒体积比浓度更大时, 值 将变小,此时若仍按传统单链模型计算,误差显然 不能忽略.

比如,当 = 0.4时,对于链状模型,由式(17) 知, =1.144,按式(15),2种模型计算结果比值约 为0.839,即单链模型将有16.1%的误差.常见的 磁流变液中,铁磁颗粒一般为羰基铁粉颗粒,其饱 和磁极化强度满足: $\mu_0 M_s = 2.1T$ .取 = 0.4,假 设 a = 2,由式(12),(14),(15)得磁饱和时的磁流 变液剪切屈服应力值为

y = a / = 0.37 262 kPa.

这是只考虑磁相互作用能时,羰基铁粉颗粒体 积分数为 0.4 的磁流变液所能达到的剪切屈服应 力的上限.

同样,由式(12),(13),(15)可得到不同磁场强 度下磁流变液的剪切屈服应力.

## 3 柱状结构的剪切屈服应力分析

磁流变液中,链与链之间会聚集成柱状结构, 且对于球形颗粒,颗粒稳定聚集结构为体心立方 (BCT)结构<sup>[1011]</sup>.本节构建了BCT结构计算模型, 计算磁流变液磁致剪切应力,并对链状和柱状结构 的剪切屈服应力大小进行比较.

对于 BCT 结构单元,其 3 个方向长度比为 √6 √6 2,设长度最短的边所在方向为链的方 向,且与外加磁场方向一致.则 BCT 单元在空间无 限扩展后,即为 2 系列的平行等间距链,只不过 2 系列链在 3 个方向上互相错开此方向的半个单位 距离.可见柱状结构内部,可看成是由 2 个系列的 平行等间隔链所组成.

柱状结构的磁致剪切应力分析,计算过程与链 状结构相似,即式(11)对空间各处颗粒求和.只不 过对链状结构进行计算时,是对一个系列链中颗粒 求和,而对于柱状结构,要对各个柱2个系列链中 颗粒求和.由于柱大小有限,位于柱内不同位置的 链中的颗粒受到的磁相互作用能不同,求磁流变液 中的磁能密度时,对柱内不同链中颗粒的磁相互作 用能作了平均.

502

假设磁流变液中,柱与柱之间平行等间隔排 列.则对柱状结构的建模计算,涉及到2个问题:柱 的粗细,柱与柱之间的间距.假设柱在链方向也就 是沿磁场方向无限长,但在垂直于磁场方向长度有 限.不失一般性,作为近似,假设垂直于磁场方向, 单个柱由 N<sup>2</sup> 个 BCT 单元组成,即单方向上含有 N 个 BCT 单元. N 值变化时,柱的大小也随之变 化.每个柱内链的总条数由下式给出

$$sum = (N + 1)^2 + N^2$$
. (19)

设磁流变液中铁磁颗粒体积分数为 ,同样设链内相邻颗粒距离 do = aR ,则垂直于磁场方向单位截面内链的总数为

total = 
$$\frac{aR}{\frac{4}{3}R^3} = \frac{3}{4}\frac{a}{R^2}$$
. (20)

单位截面含柱个数为

$$N_{t} = \frac{\text{total}}{\text{sum}} = \frac{3 a}{4 R^{2} ((N+1)^{2} + N^{2})} .$$
(21)

则相邻柱与柱之间距离为

$$d_{\rm E} = \frac{1}{\sqrt{N_t}} = \sqrt{\frac{4 R^2 ((N+1)^2 + N^2)}{3 a}} . \quad (22)$$

从而,可以定出周围柱以及周围柱中链的位置.

对于链内颗粒间距较小的情况,不妨假设 d<sub>0</sub> = 2*R*.限于计算量,计算时只考虑了周围 20 层 柱的影响:对于单个柱内链数为上百条的情况<sup>(12)</sup>.



不妨假设 *N* = 7. 给定颗粒体积比浓度为 = 0.3, 应用式(15),对柱内颗粒和周围柱中颗粒求和,计 算得到磁场引起的无量纲化磁流变液剪切应力、应 变关系图(见图 5).



从图中可见,外加磁场一定时,与链状结构相 似,含柱状结构磁流变液的磁致剪切应力-应变关 系图中,磁致剪切应力在达最大值前,与剪应变近 似呈线性关系,故小应变下磁致剪切应力的比值即 可近似作为剪切屈服应力比值;当剪应变 0.35 时,含柱状结构磁流变液的磁致剪切应力达到最大 值,可将其作为磁流变液的剪切屈服应力.

of columnar structure

小应变下,颗粒体积分数为 0.3 时,修正模型 与单链模型的磁致剪切应力比值 r 随 N 变化关系 见图 6a.

N = 7时,计算得到的修正模型与单链模型的 磁致剪切应力比值 r 随颗粒体积比浓度 变化关 系如图 6b 所示.



#### 图 6 2 种模型计算得到的磁致剪切应力的比值

Fig. 6 Ratio of the increases of shear stress due to the field calculated from two models

从图 6 可见,对于柱状结构,单链模型仍然高 估了磁流变液的磁致剪切应力,也即高估了其剪切 屈服应力.柱内链数越多,也就是柱越粗时,2 种模 型差别越大;颗粒体积比浓度越大,柱与柱之间距 离较小时,2 种模型的差别也较大. 一定时,磁致 剪切应力有随着柱内链数增加而下降的趋势.从图 6b 知, = 0.1, N = 7 时,修正模型与单链模型磁 致剪切应力比值,即剪切屈服应力比值为 0.915, 比 = 0.1链状模型对应的比值 0.935 略小.当 = 0.4时,对于链状结构, = 1.144,2种模型计算 结果比值约为 0.839;从图 6b 知,对于柱状结构, 修正模型与单链模型剪切屈服应力比值为 0.894, 故此时柱状结构磁流变液的剪切屈服应力比链状 结构的要大.

可见,颗粒体积比浓度较小时,在提高磁流变 液剪切屈服应力方面,链状结构比柱状结构要好; 但颗粒体积比浓度较大时,柱状结构优于链状结构.而从式(12)可知,磁流变液磁致剪切应力随着 颗粒体积分数线性增加.虽然按式(12)计算会有误 差,但误差不太大,不能抵消颗粒体积分数增加时 磁致剪切应力增加的趋势.所以在应用磁流变液 时,为了得到较大的剪切应力及剪切屈服应力,人 们总是倾向于选择较大的颗粒体积比浓度,并且此 时柱状结构为较优结构,这与人们的一般认识也是 一致的<sup>[12]</sup>.

#### 4 结 论

 1) 传统的单链模型高估了磁流变液的剪切屈 服应力.颗粒体积比分数为 0.4 时,对于链状结构, 单链模型误差为 16.1 %,而对于柱状结构,用单链 模型计算时,其误差为 10.6 %.

2)若仅考虑磁相互作用能,在提高磁流变液 的剪切屈服应力方面,颗粒体积比浓度较小时,链 状结构比柱状结构要好;而当颗粒体积比浓度较大 时,柱状结构优于链状结构.

#### 参考文献:

- [1] 汪建晓,孟 光. 磁流变液研究进展[J]. 航空学报, 2002,23(1):6-12.
   WANGJian xiao, MENG Guang, Research advances in magnetorheological fluids[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2002, 23(1):6-12.
- [2] JOLL Y M R, BENDER J W, CARLSON J D, Properties and applications of commercial magnetorheological fluids[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1999,10(1): 5-13.
- [3] BOSSIS G, LACIS S, MEUNIER A, et al. Magne-

torheological fluids [J]. Journal of Magnetism And Magnetic Materials, 2002,252: 224-228.

- [4] LEMAIRE E, BOSSIS G, Yield stress and wall effects in magnetic colloidal suspensions [J]. J. Phys. D: Appl. Phys., 1991,24:1473-1477.
- [5] GINDER J M ,DAVIS L C , Shear stresses in magnetorheological fluids: role of magnetic saturation [J].
   Appl. Phys. Lett., 1994,65 (26): 3410-3412.
- [6] ZHANG X Z, GONG X L, ZHANG P Q, Study on the mechanism of the squeeze-strengthen effect in magnetorheological fluids [J]. Journal of Applied Physics, 2004, 96: 2359-2364.
- [7] JOLLY M R, CARLSON J D, MUNOZ B C, A model of the behaviour of magnetorheological materials[J]. Smart. Mater. Struct., 1996, 5: 607-614.
- [8] ROSENSWEIG R E. On magnetorheology and electrorheology as states of unsymmetric stress [J]. J. Rheol., 1995, 39(1): 179-192.
- [9] TANG X L, CONRAD H, An analytical model for magnetorheological fluids [J]. J. Phys. D: Appl. Phys., 2000, 33: 3026-3032.
- [10] WEN WJ, WANGN, MA H R, et al. Field induced structural transition in mesocrystallites [J]. Physical Review Letters, 1999, 82: 4248-4251.
- [11] ZHOUL, WEN WJ, SHENGP. Ground states of magnetorheological fluids[J]. Physical Review Letters, 1998, 81: 1509-1512.
- [12] TANGX, ZHANGX, TAO R, et al. Structure enhanced yield stress of magnetorheological fluids
   [J]. Journal of Applied Physics, 2000, 87 (5): 2634-2638.

(责任编辑 姚志昌)